Lista de Exercícios IPE # Auxiliar

Taiguara Melo Tupinambás

09 de maio de 2017

Exercício 1

Se , A ⸦ Ω, a probabilidade de A é dada pelo intervalo do evento. Como os intervalos dos eventos *A*, *B* e *C* são mutualmente exclusivos, a probabilidade de cada um é dada pela soma de seus intervalos. Desta forma, temos que:

Para saber se os eventos são mutualmente independentes, são investigadas as independências dois a dois e três a três:

– *A* e *B* são independentes

– *A* e *C* são independentes

– *B* e *C* são independentes

– *A*, *B* e *C* são independentes

Logo, como os eventos são independentes 2 a 2 e 3 a 3, eles **são mutualmente independentes.**

Exercício 2

Sabe-se que:

Em que é a CDF geométrica, dada por:

Desenvolvendo o somatório para , e substituindo *x* por *n*, temos:

Desta forma,

Em seguida é determinada a probabilidade , i.e., a probabilidade da variável ser maior do que *n+k*, dado que ela é maior do que *n.*

No entanto, se *X* é maior do que *n+k*, ele é maior do que *n* (para todo k>0).

Logo, , e:

Esse resultado era esperado, uma vez que a probabilidade de não se obter um sucesso antes de *n+k* tentativas, dado que já não houve sucesso em *n* tentativas, deveria ser igual à probabilidade de não se obter um sucesso antes de *k* tentativas. Pode-se dizer, dessa forma, que essa variável aleatória não possui memória.

Exercício 3

O valor esperado da variável aleatória *Y* é dada por:

Dado que *X = n* e sabendo que Y ~ geom((n+1)-1), temos que:

Logo, o número esperado de secundárias é de ***1 + λ***

A correlação é dada por:

Determinando a covariância:

Sabendo que *var(X) = λ*, falta determinar *var(Y):*

E, finalmente, a correlação entre as primárias e secundárias é dada por:

Exercício 4

Para X~Uni(0,2), temos que:

Para X~Uni(0,1/2):

Para X~N(μ,σ2):

Resolvendo a segunda integral:

Uma vez que E[X2] = var(x) + E2[X]. Desta forma, a entropia diferencial de X é dada por:

Avaliando os resultados, temos que a entropia diferencial das variáveis aleatórias estudadas só dependem do desvio padrão, sendo que para um mesmo valor de sigma, variáveis com distribuição gaussiana apresentam aproximadamente 1.4 nats a mais.

Exercício 5

Primeiro, será encontrada a probabilidade conjunta de *U* e *V*:

Por independência:

As funções inversas e precisam ser determinadas. Para isso, é necessária uma manipulação das variáveis U e V, para se isolar X e Y, através da determinação de U/V e U2+V2:

Calculando a Jacobiana:

Como , e X e Y são independentes, temos que a probabilidade conjunta de *U* e *V* é dada por:

Como a probabilidade conjunta pode ser fatorada em um produto de duas pdfs marginais, as variáveis *U* e *V* são independentes e cada uma com uma distribuição normal, com média 0 e variância 1, N(0,1), c.q.d.

Exercício 6

Se Z é o valor máximo entre X e Y, temos que a probabilidade . Como X e Y são independentes, . Pela definição de CDF, temos que . Logo:

Temos que , que é dado por:

Desta forma, temos que:

Desta forma, é obtida através da diferenciação de , e é dada por . Agora, para determinar , falta encontrar a distribuição conjunta de *w* e *z*. Para isso, é calculada a CDF da distribuição conjunta, somando os casos em que *X* é o valor mínimo, *Y* é o valor mínimo e ambos são iguais.

Como e *X* e *Y* são independentes, temos que:

Derivando para encontrar :

Com e encontrados, é possível calcular o valor de

Desta forma, só falta calcular a integral do valor esperado descrito no início da questão:

Esse resultado é, de certa forma, esperado, uma vez que se é dado Z=Z, logo o a VA condicional W pode ser interpretada como uma VA de distribuição uniforme em (0,Z), com valor esperado